

## Kit illet meg az utolsó szó?

Who should have the last word?

Szabó Barna

Washington University in St. Louis, Professor, szabo@wustl.edu;  
A Magyar Tudományos Akadémia külső tagja

## Kulcsszavak

modellfejlesztés,  
törésmechanika,  
szimulációk irányítása,  
kalibrálás tartománya,  
validálás

## Keywords

model development,  
fracture mechanics,  
simulation governance,  
domain of calibration,  
validation

## Absztrakt

A matematikai modellek evolúciós folyamatok termékei. A szimulációk irányításának egyik kulcsfontosságú célja az, hogy akadálymentes környezetet teremtsen és tartson fenn a matematikai modellek szisztematikus fejlesztésére. A matematikai modellek megfogalmazását a repedések terjedésének modelljeivel szemléltetjük a lineáris törésmechanika területén. Egy új modellcsaládot javasolunk, amely várhatóan kibővíti a jelenleg használt modellek alkalmazhatóságát.

## Abstract

Mathematical models are products of open-ended evolutionary processes. One of the key objectives of simulation governance is to establish and maintain a hospitable environment for the evolutionary development of mathematical models. The conceptual development of mathematical models is illustrated through models of crack propagation in linear elastic fracture mechanics. A new family of models is proposed that is expected to broaden the scope of the currently available models.

A címben feltett kérdés azoknak szól, akik matematikai modellek megalkotásával foglalkoznak, vagy matematikai modellek felhasználásával kapott adatok alapján hoznak döntéseket. Másképpen fogalmazva, az a kérdés, hogy van-e tökéletes matematikai modell, és ha volna és megtalálnánk, honnan tudnánk, hogy tökéletes modellre találtunk?

A felvetett kérdés azért időszerű, mert matematikai modellek mára nélkülözhetetlenné váltak a műszaki gyakorlatban, továbbá a műszaki és az alaptudományokban is. Fontos tehát tudnunk, hogy milyen feltételek mellett indokolt az, hogy higgyünk a matematikai modellek előrejelzéseiben. Ezzel kapcsolatban megemlítyük David Hume<sup>1</sup> egyik híres mondását: *“A bölcs ember a hitét a bizonyítékokhoz igazítja”*.

A válasz az, hogy senkit sem illet meg az utolsó szó és nincsenek abszolút tökéletes matematikai modellek sem. A modellek fejlődése egy evolúciós folyamatnak tekinthető. Ahhoz, hogy megértsük miért van ez így, tisztázni kell néhány alapvető fogalmat, nevezetesen: modell-függő realizmus, a modell érvényességének, jóságának megerősítése (validálás) és végül a vonatkozó szimulációs folyamatok szabályozása, irányítása (simulation governance).

A legfontosabb témánkhöz kapcsolódó általános fogalom neve: "modell-függő realizmus" (model-dependent realism). Ez az a filozófiai álláspont, amely szerint a fizikai valóság különböző megnyilvánulásait csak matematikai modellek által ismerhetjük meg. Stephen Hawking a világhírű elméleti fizikus így fogalmazott: *“Én azt a pozitívista álláspontot képviselem, miszerint egy fizikai elmélet csak egy matematikai modell, és értelmetlen azt kérdezni, hogy megfelel-e a valóságnak. Mindössze annyit várhatunk el, hogy az előrejelzései összhangban legyenek a megfigyelésekkel”* [1].

A modell-függő realizmus fogalmát Hawking a következő

példával világította meg: A föld felszíne nem síkba fejthető felület, a földfelszín alakzatait (távolságokat, szögeket, területeket) nem lehetséges torzítás nélkül síkban ábrázolni. A Mercator vetület jó közelítést ad a gömb és az érintő henger érintkezési pontjai körül, de azoktól távolodva növekszik a torzulás mértéke [2]. Hasonlóképpen, a matematikai modellek jó közelítést képesek adni a modellt jellemző paraméterek megengedett intervallumaiban, de azokon túl a közelítés minősége romlik.

Mit értünk matematikai modell alatt? Minden matematikai modell olyan transzformációnak tekinthető, amely a beviteli adatokat ( $\mathbf{D}$ ) a kiviteli adatokba ( $\mathbf{F}$ ) transzformálja. Az (1) kifejezésben a jobbra mutató nyíl azon műveletek összességét jelzi, amit matematikai modellnek nevezünk. A nyíl alatt álló  $\mathbf{p}$  azt hangsúlyozza, hogy a műveleteket a műveletek eredményét meghatározó paraméterek jellemzik. Ezeket a paramétereket kalibrációs mérések alapján állítjuk be.

$$(\mathbf{D}, \mathbf{l}) \xrightarrow{\mathbf{p}} \mathbf{F}, \quad (\mathbf{D}, \mathbf{p}) \in \mathbb{C} \quad (1)$$

Matematikai modellek megfogalmazása során általánosan elfogadott összefüggéseket és kiegészítő hipotéziseket alkalmazunk. Ezek alapján a modell előrejelzéseit megfelelő kísérletekkel vagy megfigyelésekkel ellenőrizzük, és a kiegészítő hipotéziseket szükség szerint módosítjuk. A kiegészítő hipotézisek megfogalmazása kreatív tevékenység, mivel a kiegészítő hipotézisek függenek a megfogalmazó sajátos meglátásaitól és szubjektív feltevéseitől is. A fenti kifejezésben álló  $\mathbf{l}$ -vel (ez az  $\mathbf{l}$  az idea szóra utal) azt jelöltük, hogy a transzformáció általában szubjektív elemeket is magában foglal.

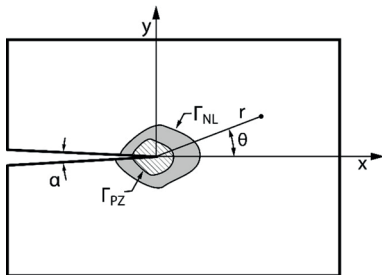
A  $(\mathbf{D}, \mathbf{p}) \in \mathbb{C}$  kifejezés pedig azt jelzi, hogy a  $\mathbf{D}$  adatoknak és a  $\mathbf{p}$  paramétereknek bizonyos feltételeket kell kielégíteniük, amelyek a modell megfogalmazásával és a modell beállításával kapcsolatosak.

<sup>1</sup> Skót filozófus (1711-1776).

## Példa: lineáris törésmechanika

A fentiekben megfogalmazottakat a lineáris törésmechanika példáján keresztül illusztráljuk. A cél egy rugalmas testben létező repedés hosszának becslése egy adott nagyciklusú, periodikusan ismétlődő terhelés ciklusszámának függvényében. Adva vannak a geometriai méretek és anyagtulajdonságok.

A modell megfogalmazása a következő megmondásokon alapszik: Tekintsünk egy olyan lemezalakú testet, amelyben éles bevágás van, lásd az 1. ábrát. Terhelés esetén a csúcspont (az origó) környékén nem alkalmazhatók a lineáris rugalmasságtan egyenletei, mivel nagy (és részben képlékeny) lesz az alakváltozás. Lehetséges továbbá, hogy még a kontinuummechanika nagy alakváltozásokat figyelembe vevő egyenletei sem alkalmazhatók, mivel kis repedések is keletkezhetnek, illetve terjedhetnek el. Ezt a tartományt  $\Gamma_{PZ}$  jelöli, ahol a PZ betűpár az angol "process zone" rövidítése. A  $\Gamma_{PZ}$  és a  $\Gamma_{NL}$  közötti szürkével árnyékolt tartományon még érvényesek a kontinuummechanika egyenletei, de a lineáris rugalmasságtan egyenletei már nem. Az alapvető feltevés az, hogy a  $\Gamma_{NL}$ -re felírt lineáris rugalmasságtan egyenleteinek megfelelő peremértékek meghatározzák az azon belüli nemlineáris alakváltozásokat, és azokon keresztül a  $\Gamma_{PZ}$  által határolt tartományon végbemenő irreverzibilis folyamatokat is.



1. ábra: Lemez alakú test éles bemetszéssel. Jelölések.

A bemetszés csúcspontjának környékén a feszültségmező kielégíti a kétdimenziós rugalmasságtan egyenleteit és a bemetszés peremfeltételeit: az utóbbiak szerint zérus a bemetszésen ható normál- és nyírófeszültségek értéke és a feszültségmezőt a következőképpen adhatjuk meg:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i r^{\lambda_i} \begin{Bmatrix} \phi_x^{(i)}(\theta) \\ \phi_y^{(i)}(\theta) \\ \phi_{xy}^{(i)}(\theta) \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

ahol  $\lambda_i$  sajátértékeket,  $\phi_x^{(i)}$ ,  $\phi_y^{(i)}$ ,  $\phi_{xy}^{(i)}$  pedig sajátfüggvényeket jelöl [3].

A lineáris törésmechanikában zérus a bemetszés az ábrán  $\alpha$ -val jelölt szöge, a sorfejtés első tagjának  $c_1$  együtthatója a feszültségintenzitási tényezővel arányos, míg  $\lambda_1 = -1/2$ . Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban feltételezzük, hogy az  $x$  tengely a feszültségmező

szimmetria tengelye.

A lineáris törésmechanika alapvető feltevése az, hogy a (2) egyenletben az első tag kivételével a feszültségmező sorba fejtésének minden tagját elhanyagolhatjuk. Ez azt eredményezi, hogy a  $\Gamma_{NL}$ -en ható peremértékeket a sorfejtés első tagja határozza meg.

Első pillantásra talán hihetetlennek hangzik, hogy a (2) egyenletben csak az első tag szükséges ahhoz, hogy a repedéscsúcson környékén zajló komplikált nemlineáris jelenségekből adódó repedéshossz változás értékét meghatározzuk. Ennek az a magyarázata, hogy a  $\lambda_1 = -1/2$  sajátérték kivételével a többi  $\lambda_i$  mindegyike pozitív (lásd például [3]). Ezért amikor az  $r$  sugár zérushoz tart, akkor az első tag kivételével minden tag ugyancsak zérushoz tart, míg az első tagnak végtelen a határértéke. Tehát az is szükséges, hogy  $\Gamma_{NL}$ -t magába foglaló legkisebb kör átmérője megfelelően kicsi legyen.

Paul Paris<sup>2</sup> nevéhez fűződik az úgynevezett Paris törvény (Paris law) [4]:

$$\frac{da}{dN} = C(K_{\max} - K_{\min})^m, \quad a_1 \leq a \leq a_2 \quad (3)$$

ahol  $a$  jelöli a repedés hosszát,  $N$  a ciklus-szám,  $K_{\max}$  és  $K_{\min}$  a feszültségintenzitási tényező maximuma és minimuma,  $C$  és  $m$  pedig mérésekkel meghatározott anyagállandók. Lásd ugyancsak [5]. Az  $a_1 \leq a \leq a_2$  feltétel azért szükséges, mert a  $C$  és  $m$  anyagállandók csak a modell beállításánál használt repedéshosszokra, vagyis a kalibrációs tartományra érvényesek.

A (3) egyenlet kapcsolatot létesít a lineáris rugalmasságtan egyenleteiből számítható feszültségintenzitási tényező ( $K$ ) és a repedéshossz növekedési sebessége között. Ha mindkét oldal logaritmusát vesszük, akkor látható, hogy  $\log(da/dN)$  a  $\log(K_{\max} - K_{\min})$  változó lineáris függvénye. A modellfejlesztés terminológiájában a Paris törvény egyike a lehetséges kiegészítő hipotéziseknek, amely számos kísérleti eredmény alapján érvényesnek tekinthető a vonatkozó kalibrációs tartományokon belül.

A Paris törvénynek több változata létezik, lásd például [6-7]. Walker [8] a következő változatot javasolta:

$$\frac{da}{dN} = C(K_{\max}(1-R)^\gamma)^m, \quad (4)$$

ahol  $R = K_{\min}/K_{\max}$  a terhelés aszimmetria tényezője (cycle ratio) és  $\gamma$  egy mérésekkel meghatározott anyagállandó. Helikoptereket jellemző terhelési ciklusok esetén például 0,2 és 0,36 között van az  $R$  értéke [9]. Az  $R = 0$  és  $\gamma = 0$  esetekben nincs különbség a 3. és 4. egyenlet között.

Valójában, az a megszorítás, hogy  $\log(da/dN)$  és  $\log(K_{\max}(1-R)^\gamma)$  között lineáris összefüggés áll fenn,

<sup>2</sup> Amerikai mérnök professzor (1930-2017).

nem szükséges. Bevezetve a

$$x = \log_{10} \left( K_{\max} (1-R)^\gamma \right),$$

$$y = \log_{10} \left( \frac{\Delta a}{\Delta N} \right), \quad (5)$$

$$y = f(x)$$

jelöléseket, a repedés hosszának növekménye ciklusonként (vagyis  $\Delta N=1$ ) a következőképpen írható:

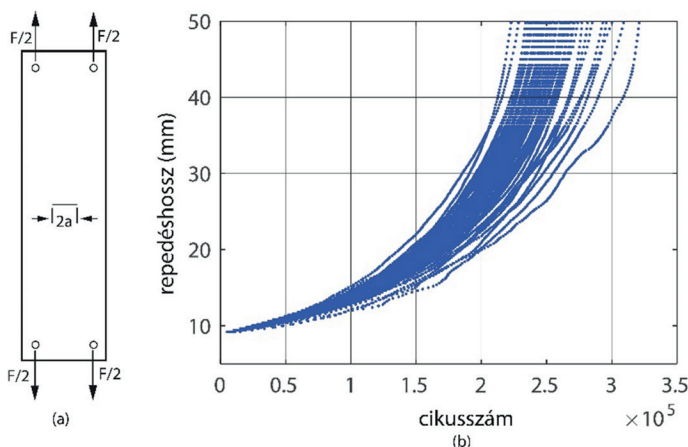
$$\Delta a = 10^{f(x)}. \quad (6)$$

Elegendő tehát a kísérleti úton meghatározott  $(a_i, N_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  adatokból és  $K_{\max}$ ,  $R$  és  $\gamma$  már ismert értékeiből kiszámítani a  $\Delta a_i / \Delta N_i$  hányadosok értékeit, továbbá az azokhoz tartozó  $K_{\max}^{(i)} (1-R^{(i)})^\gamma$  értékeket. Ezek az adatok meghatározzák az

$$x_i = \log_{10} \left( K_{\max}^{(i)} (1-R^{(i)})^\gamma \right) \text{ és } y_i = \log_{10} (\Delta a_i / \Delta N_i)$$

értékeket. Ezekből az adatokból megkapjuk az  $f(x)$  függvényt. Legegyszerűbb feltételeznünk, hogy az  $f(x)$  jól közelíthető polinomokkal, melyekre nézve a legkisebb négyzetek módszerét használjuk az ismeretlen együtthetők meghatározására.

Számpeánkban Virkler [10] adatait használjuk az előzőekben bevezetett modell felépítésére. A felhasznált adatok hatvannyolc 2024-T3 alumíniumötvözetből készült próbatest törésmechanikai vizsgálatának az eredményei. A próbatestek 0,1 inch (2,54 mm) vastag, 22,00 inch (558,8 mm) hosszú és 6,00 inch (152,4 mm) széles, közepen repedt panelek voltak. A próbatestek alakja a 2(a) ábrán látható.



2. ábra: a) a próbatestek alakja; b) mért adatok

Az állandó amplitúdójú terhelés maximuma 5,25 kp (23,35 kN), minimuma 1,05 kp (4,67 kN), a terhelés frekvenciája 20 Hz volt. Az a-val jelölt fél repedés hossz kezdeti értéke 9,00 mm, végső értéke 49,80 mm volt. Ebben az intervallumban mindegyik próbatest ciklusszáma 164 pontban adott. Ez azt jelenti, hogy összesen  $68 \times 164 = 11\,152$  mérési adat állt rendelkezésünkre, lásd a 2(b) ábrát.

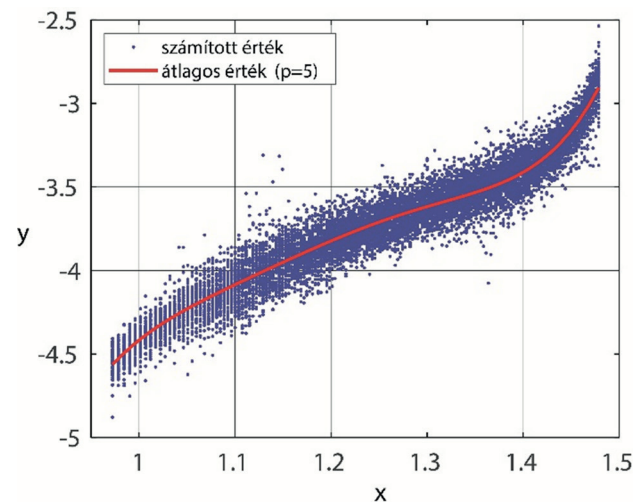
Virkler az átlagos mérési hibát 0,00141 mm-re, a terhelés hibáját 0,2%-ra becsülte. Tekintve, hogy az  $f(x)$  függvény meghatározásában a repedéshosszak különbségeit osztjuk a ciklusszámok különbségeivel, a mérési hibák növelik a számított adatok szórását.

A számértékek tekintetében figyelembe kell venni, hogy megtartottuk Virkler tanulmányában használt egységeket, ahol  $K$  szokásos amerikai mérték egységeket (ksi<sup>1/2</sup>/in), míg a repedéshossz mm-ben adott.

Az adatokból számított  $(x_i, y_i)$  értékpárokat a  $\gamma = 0$  esetén a 3. ábra szemlélteti. Az átlagértékeket a legkisebb négyzetek módszerével határoztuk meg. Ez megfelel annak a feltevésnek, hogy  $y(x)$  normál eloszlást követ, amelynek ötödrendű polinommal közelített átlagértéke:

$$\bar{y}(x) = 397,8x^5 - 2369,5x^4 + 5631,1x^3 - 6676,9x^2 + 3953,8x - 940,83 \quad (7)$$

és szórása:  $s=0,0956$ . Ez sok lehetséges és plauzibilis statisztikai modell egyike, formailag pedig a legegyszerűb- bek közé tartozik.



3. ábra: Adatokból számított értékek és azok átlagos értékei

Mellőzve a részleteket megjegyezzük: megvan annak is a lehetősége, hogy adott terhelési ciklus és kezdeti repedéshossz ismeretében meghatározzuk, mekkora annak a valószínűsége, hogy a repedéshossz egy előre megdott intervallumban legyen. Ez a lehetőség feltétlenül szükséges a matematikai modellek prediktív teljesítményének kiértékeléséhez, továbbá a modellek jóságának, érvényességének ellenőrzéséhez (a validáláshoz) [11].

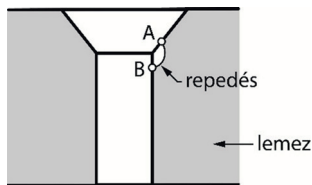
### Korlátok

Az (1) egyenletben szerepel a  $(D, p) \in \mathbb{C}$  kifejezés, amely azt jelzi, hogy a  $D$  adatoknak és a  $p$  paramétereknek bizonyos feltételeket kell kielégíteniük. Példánk esetében, a Virkler adatokat használtuk a modell (7) egyenletben lévő paramétereinek meghatározására. A kalibrálás tartománya  $(C)$  meghatározza az anyagot (2024-T3 alumíniumötvözet), az alkalmazási területet (lemezek), a terhelési módot (síkban ható megoszló terhelés), a terhelés



mértének felső határát, valamint a repedéshossz és a vastagság arányát  $a/t \geq 3,5$ . Ezekon a korlátokon belül a modell érvényesítettnek vehető.

Matematikai modellek alkalmazásában a leggyakrabban előforduló hibák a  $\mathbb{C}$ -vel jelölt tartományban lerögzített korlátok túllépésével kapcsolatosak. A törésmechanikában különösen gyakori hiba az, ha a kalibrált repedéshosszaknál sokkal kisebb méretű repedésekre történik az alkalmazás. A repülőgépiparban például nagyon fontos a kisméretű kezdeti repedések vizsgálata. Erre a 4. ábrán látható egy példa. Ebben a példában a repedésfront-közeli feszültségmező egészen más jellegű, mint a kalibrálás során használt próbatestben. Az eltérés fokozott mértékben jelenik meg az A és B jelű metszéspontok környékén.



4. ábra: Példa: kisméretű kezdeti repedés

## Általánosítások

A Paris törvény kétdimenziós feszültségmezőkre vonatkozik. Tekintve, hogy minden test háromdimenziós, beleértve a kalibrálásnál használt próbatesteket is, fennáll az a hallgatolagos feltételezés, hogy háromdimenziós feszültségmezőket elegendő pontossággal közelíti a repedésfront mentén a (2) egyenlet, amelyben a repedésfront-menti változót  $s$ -el jelölve:  $a_i = a_i(s)$ . A törésmechanikában ez az általánosan elfogadott feltevés egyike. A gyakorlat azt mutatja, hogy ez a feltevés, a repedésfront végpontjaihoz közeli pontoktól eltekintve, valóban indokolt. A repedésfront végpontjaiban viszont a feszültségmező radikálisan eltér a kétdimenziós feszültségmezőktől. Ezekben a pontokban a feszültségintenzitási tényező valószínűleg zérus, bár ez a feltevés elméletileg mindeddig tisztázatlan maradt.

A  $K$  feszültségintenzitási tényező összefüggést létesít a lineáris rugalmasságtan egyenleteinek megoldásából származó feszültségmező és az 1. ábrán bejelölt nemlineáris zónában végbemenő mechanikai folyamatok között. A két térdimenzióban  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$  a  $K$  mértékegysége. Három térdimenzióban a repedésfront mentén a végpontokat közelítve a feszültségmező egyre inkább eltér a kétdimenziós mezőtől és a végpontokban a  $K$ -nak megfelelő együttható mértékegysége már nem  $\text{MPa}\sqrt{\text{m}}$ . Ezért három térdimenzióban elvi nehézségekbe ütközik a  $K$  értelmezése.

A fent vázolt nehézség elkerülése végett bevezetünk egy funkcionált, amely számítható a háromdimenziós lineáris rugalmasságtan egyenleteiből származó feszültségmezőből, és két dimenzióban arányos a feszültségintenzitási tényezővel. Legyen

$$P_{\alpha,\rho} = \frac{1}{\rho^\alpha V_c} \int_{\Omega_c} |x|^\alpha \sigma_1^\lambda \sigma^{-1-\lambda} dx dy dz, \quad a \geq 0, 0 \leq \lambda \leq 1, \rho > 0 \quad (8)$$

a kérdéses funkcionál. Ebben az  $x$  a helyvektort jelöli egy olyan koordináta-rendszerben, melynek origója a repedésfront egy tetszőleges pontja és a koordináta-rendszer úgy helyezkedik el, hogy az  $x$  tengely merőleges a repedés frontjára, az  $y$  tengely merőleges a repedés síkjára vagy annak érintő síkjára, továbbá  $\sigma_1$  az első főfeszültséget,  $\sigma$  a von Mises-feszültséget jelöli, és az  $\alpha$ ,  $\lambda$  és  $\rho$  mind beálítható paraméterek. Az integrálás tartománya:

$$\Omega_c = \{x \mid \sigma_1(x) > 0, |x| < \rho\}, \quad V_c = \int_{\Omega_c} dx dy dz. \quad (9)$$

A fenti definíció azon az elgondoláson alapszik, hogy a lineáris megoldásnak megfelelő főfeszültség és a von Mises-feszültség szorzatának súlyozott átlaga közötti kapcsolat legalább olyan jól meghatározza a  $\Gamma_{PZ}$ -n belüli folyamatokat, mint a  $K$ . Ezt a feltevést mérési adatok alapján természetesen érvényesíteni kell.

Kétdimenziós feszültségmező esetén  $\lambda=1$ ,  $\alpha=1/2$ . A feszültségintenzitási tényező és a  $P_{\alpha,\rho}$  közötti összefüggést a következő képlet adja meg:

$$K = \frac{\pi\sqrt{2\pi}}{3} \lim_{\rho \rightarrow 0} (\sqrt{\rho} P_{\alpha,\rho}). \quad (10)$$

Ez azt jelenti, hogy a már meglévő  $da/dN$  és  $\Delta K$  közötti összefüggések kis változtatással érvényesek maradnak a  $da/dN$  és  $\Delta P_{\alpha,\rho}$  közötti összefüggésekre is. A  $P_{\alpha,\rho}$  kifejezés jelentős előnye az, hogy áttekinthető értelmezést ad a háromdimenziós repedésfrontok minden pontjára nézve, továbbá kiterjeszhető az éles bemetszések eseteire is.

Természetesen az előzőekben bevezetett  $P_{\alpha,\rho}$  funkcionál egyike a sokféle választási lehetőségnek. A prediktor és a statisztikai modell megfogalmazása intuíción és tapasztalatokon alapul. Objektív módszerek vannak alternatív megfogalmazások relatív teljesítményének kiértékelésére. Az alkalmazott matematikai modellek evolúciós folyamatok eredményeként jönnek létre és fejlődnek ki mind az alaptudományokban, mind pedig a műszaki tudományokban is [11].

## Előrettekintés

A több mint hatvan évvel ezelőtt megfogalmazott Paris modell (Paris law) egy evolúciós folyamat első stádiumába sorolható. Bizonyos megszorítások figyelembevételével érvényesítettnek tekinthetjük a kalibrálás tartományán belül (amit  $\mathbb{C}$ -vel jelöltünk). A probléma az, hogy a műszaki gyakorlatban igény van olyan alkalmazásokra, amelyek jóval kívül esnek a Paris modell megfogalmazásában feltételezett kétdimenziós feszültségmező korlátain és a kalibrálás tartományán. A 4. ábrán látható kis repedés egy példája ennek. Az azon estekre vonatkozó alkalmazások, melyekre nézve a maradó feszültségek is befolyásolják a repedések kialakulását és terjedését, ugyancsak kívül esnek a Paris modell bevezetése során alkalmazott feltevéseken, azaz nem alkalmazható rájuk a Paris modell.

A matematikai modellek fejlesztése nyílt folyamat, amely függ egyrészt a szakemberek kreatív elgondolásaitól,

másrészt a rendelkezésükre álló adatoktól. Idővel mindkét területen fejlődés várható. **Ez indokolja azt az állításunkat, hogy senkit sem illet meg az utolsó szó.** Mindig lesz lehetőség arra, hogy új adatok és új elgondolások alapján fokozzuk a modellek prediktív teljesítményét, bővítsük a kalibrációk tartományát, hatásosabb modelleket fogalmazzunk meg.

Ipari szinten szükség lenne olyan szervezeti keret létrehozására, amely a matematikai modellek szisztematikus fejlesztését és tesztelését tekintené fő céljának. A szimuláció irányításának kulcsfontosságú feladata, hogy barátságos környezetet hozzon létre és tartson fenn a matematikai modellek megbízhatóságának és prediktív teljesítményének folyamatos fejlesztésére [12-13].

### Köszönetnyilvánítás

A szerző köszönetet mond Eric J. Tuegel professzornak a Virkler adatállományhoz való hozzáférés biztosításáért.

### Hivatkozások

- [1] Stephen Hawking, Roger Penrose: A tér és az idő természete. Talentum Tudományos Könyvtár, Budapest, 1996.
- [2] Stephen Hawking, Leonard Mlodinow: A nagy terv, Akkord Kiadó, Budapest, 2011.
- [3] Szabó B., Babuška I.: Finite Element Analysis. Method, Verification and Validation. 2nd edition. John Wiley & Sons Inc. Hoboken NJ 2021.

- [4] Paris P. C., Gomez M. P., Anderson W.E.: A rational analytic theory of fatigue. The Trend in Engineering, 13(1), 9-14, 1961.
- [5] Tóth L.: A törésmechanika alapelvei. <https://mek.oszk.hu/01100/01190/>
- [6] Tóth L., Yarema, S. Y. Formation of the science of fatigue of metals. Part 1. 1825–1870. Mater Sci. 42, 673–680, 2006. <https://doi.org/10.1007/s11003-006-0132-3>
- [7] Tóth L., Romvári P., Nagy Gy.: Adalékok a fáradt repedés terjedési sebességét leíró összefüggésekhez, Gép 33, 325-333, 1980.
- [8] Walker K.: The effect of stress ratio during crack propagation and fatigue for 2024-T3 and 7075-T6 aluminum. In: Effects of Environment and Complex Load History on Fatigue Life, ASTM STP 462, pp. 1–14, 1970. DOI: 10.1520/STP32032S
- [9] Khosrovaneh A. K., Dowling N. E., Berens A. P., Gallagher J. P.: Fatigue life estimates for helicopter loading spectra. NASA Langley Research Center CR-181941, December 1989.
- [10] Virkler D. A., Hillberry B. M., Goel P. K.: The statistical nature of fatigue crack propagation. Transactions of the ASME - Journal of Engineering Materials and Technology. Vol. 101, pp. 148–153, 1979.
- [11] Szabó B., Babuška I.: Methodology of model development in the applied sciences. Journal of Computational and Applied Mechanics, Vol. 16, No. 2, (2021), pp. 75-86 DOI: 10.32973/jcam.2021.005
- [12] Szabó B., Actis R.: Simulation governance: Technical requirements for mechanical design. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 249–252 158–168, 2012.
- [13] Szabó B., Actis R.: Planning for simulation governance and management. Bechmark. July 2021



## ANYAGVIZSGÁLÓK LAPJA HIRDESSEN NÁLUNK!

**Érje el a szakmai partnereit,  
leendő ügyfeleit!**

Hirdessen

**az Anyagvizsgálók Lapjával!**

Lehetőséget biztosítunk

**a nyomtatott kiadványban,  
honlapunkon,  
vagy a közösségi médiában**

hirdetéseinek megjelenítéséhez.

Egyedi árajánlatért írjon az alábbi e-mail címre:

**[avilap.szerk@gmail.com](mailto:avilap.szerk@gmail.com)**

